I. النهايات (تذكير)

نشاط 1 :

1) أذكر بالأشكال الغير المحددة .

2) أذكر ببعض خاصيات النهايات و الترتيب .

جواب :

1) الأشكال الغير المحددة هي :

1) $(-\infty)+(+\infty)$; $(+\infty)+(-\infty)$ 2) $0\times(\pm\infty)$ 3) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 4) $\frac{0}{0}$ 5) 0^0 6) 1^∞ .

2) نذكر بعض خاصيات النهايات و الترتيب .

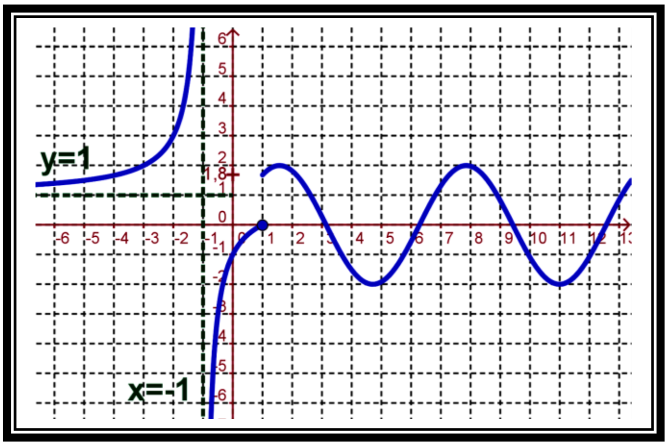
f و g و h دوال عددية حيث :

- إذا كان $f(x)\leq g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ?} f(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to ?} g(x)=+\infty$.
- إذا كان $f(x)\leq g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ?} g(x)=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to ?} f(x)=-\infty$.
- إذا كان $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ?} f(x)=\lim\limits_{x\to ?} g(x)=\ell$ فإن $\lim\limits_{x\to ?} h(x)=\ell$. ($x\to\pm\infty$ أو $x\to x_0$ او $x\to x_0^\pm$) $= ?$

نشاط 2 :

1. تمرين 1 :

الرسم التالي يمثل منحنى دالة f .



أ- حدد مبيانيا D_f مجموعة تعريف الدالة f.

ب- استنتج مبيانيا نهايات f عند محدات D_f و كذلك في 1.

2. تمرين 2 :

أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^5+1\right)^3\left(3x+2\right)$ و

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+|x+2|$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{|4-2x|}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-\sqrt{4x^2-8x}$.

3. تمرين 3 :

حدد a علما أن f لها نهاية في 3 حيث f معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-3}{2-\sqrt{x+1}} & ; x>3 \\ f(x)=\dfrac{a}{x-1} & ; x\leq 3 \end{cases}$$

4. تمرين 4 :

أحسب : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin\pi x}{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+\cos x}{1+x^2}$.

5. تمرين 5 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-|x-1|}$.

أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

ب- أحسب نهايات f عند محدات D_f.

II. اتصال دالة عددية في نقطة x_0 :

01. نشاط 1 :

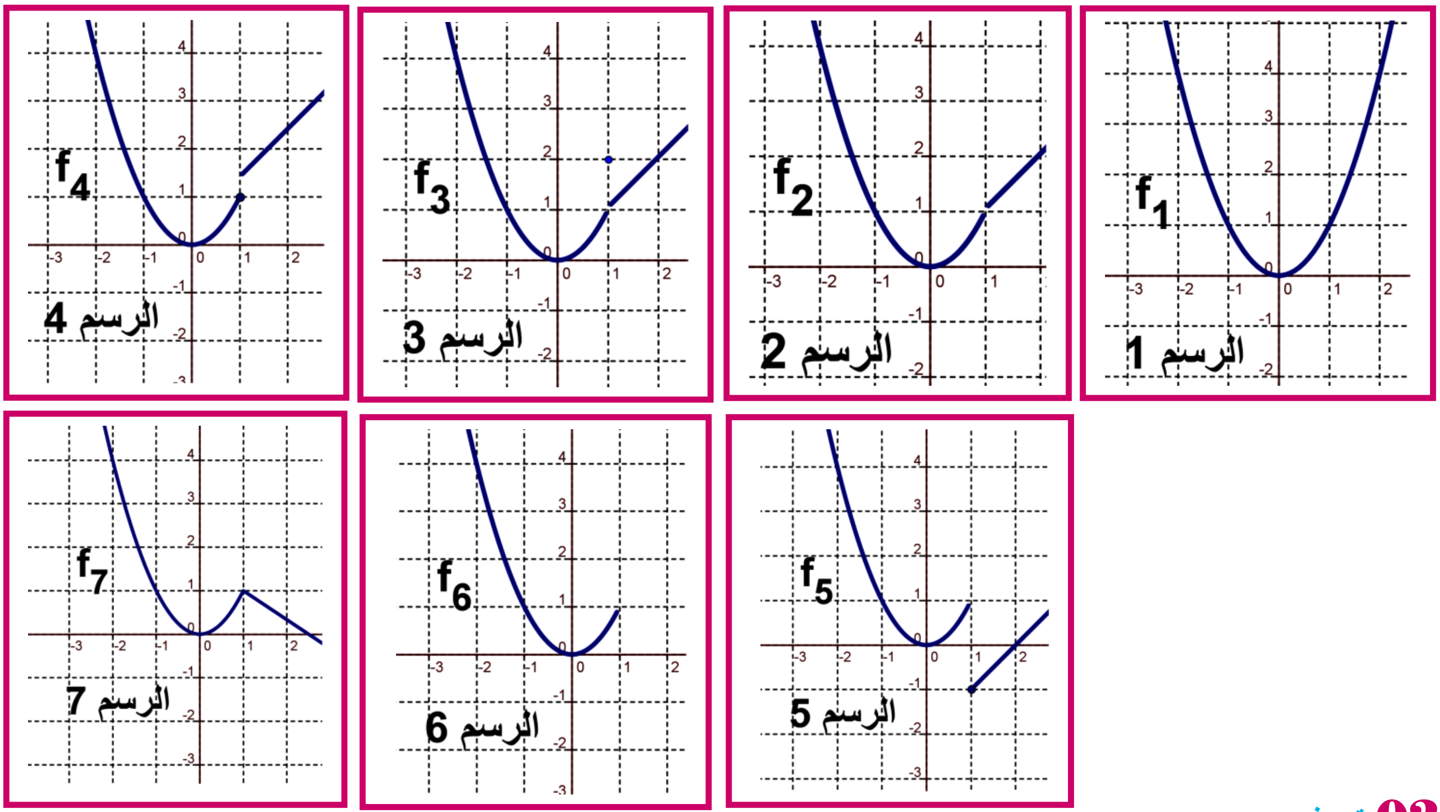
المنحنيات التالية تمثل الدوال f_i مع $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

1) نأخذ النقطة التي أفصولها $x_0 = 1$ ماذا تلاحظ ؟

2) استنتج مبيانيا $\lim_{x \to 1} f_i(x)$ مع $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$

3) الرسم 1 و 7 يمثلان دالتين متصلتين في النقطة $x_0 = 1$ و في الحالات الأخرى غير متصلة في النقطة $x_0 = 1$.

4) أعط تعريف لاتصال دالة في نقطة x_0 .



02. تعريف :

f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $I_{x_0} =]x_0 - r, x_0 + r[$ $(r > 0)$ (معرفة على مجال مفتوح I و x_0 من I).

f متصلة في x_0 يكافئ : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

III. الاتصال على اليمين والاتصال على اليسار في نقطة x_0

01. تعريف 1 – 2:

- f دالة عددية معرفة على $I_d = [x_0, x_0 + r[$ حيث $r > 0$. f متصل على يمين x_0 يكافئ : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$
- f دالة عددية معرفة على $I_g =]x_0 - r, x_0]$ حيث $r > 0$. f متصل على يسار x_0 يكافئ : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

02. أمثلة:

نأخذ النشاط السابق أدرس مبيانيا اتصال بعض من f_i على يمين و يسار النقطة $x_0 = 1$ مع $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

03. خاصية :

دالة f متصلة في x_0 يكافئ f متصل على يسار و على يمين x_0.

IV. التمديد بالاتصال في النقطة x_0 le prolongement par continuité

01. تذكير :

E و F و G ثلاث مجموعات f و g دالتان عدديتان حيث : $f : E \to G$ و $g : F \to G$.

إذا كان $F \subset E$ و $\forall x \in F : f(x) = g(x)$.

- f تسمى تمديد (prolongement) ل g . g تسمى قصور (restriction) f على F . نكتب : $g = f_{/F}$.

01. تعريف و خاصية :

f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $I^*_{x_0} =]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ مع $r > 0$. حيث :

- f غير معرفة في x_0
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

الدالة g المعرفة ب : $\begin{cases} g(x) = f(x) \ ; x \in D_f \ , x \neq x_0 \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$ هي متصلة في x_0 .

الدالة g تسمى تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة x_0

02. مثال:

لدينا : $f(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{|x| - 1}$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$.

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{|x|(|x| - 1)}{|x| - 1} \lim_{x \to 1} |x| = 1$.

- و بالتالي الدالة g المعرفة ب: $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{|x| - 1} \ ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \\ g(1) = 1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = 1$.
- كذلك الدالة h المعرفة ب: $\begin{cases} h(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{|x| - 1} \ ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} \\ h(-1) = 1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = -1$.

- كذلك الدالة k المعرفة ب: $\begin{cases} k(x)=\dfrac{x^2-|x|}{|x|-1} & ; x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \\ k(-1)=k(1)=1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0=-1$ و في $x_0=1$.

ملحوظة : يمكن كتابة الدالة k على الشكل التالي : $k(x)=|x|$

V. اتصال دالة على مجال

01. تعاريف:

- f دالة متصلة على مجال مفتوح I $(I=]a;b[)$ يكافئ f متصلة في كل نقطة x_0 من I.
- f دالة متصلة على مجال $I=[a,b]$ يكافئ : f متصلة على $]a,b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b.
- f دالة متصلة على مجال $[a,+\infty[$ يكافئ : f متصلة في كل نقطة x_0 من $]a,+\infty[$ و f متصلة على يمين في a .

02. مثال:

لنعتبر الدالة: $f(x)=x^2+3x$.

بين أن : f متصلة على المجال المفتوح $I=]1;5[$.

VI. اتصال الدوال الاعتيادية:

01. خاصية:

- كل دالة حدودية فهي متصلة على مجموعة تعريفها $D_f=\mathbb{R}$
- كل دالة جذرية فهي متصلة على مجموعة تعريفها D_f .
- $f(x)=\sin x$ و $f(x)=\cos x$ متصلتين على $D_f=\mathbb{R}$.
- الدالة: $f(x)=\tan x$ متصلة على $D_f=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$
- الدالة: $f(x)=\sqrt{x}$ متصلة على مجموعة تعريفها $D_f=\mathbb{R}^+=[0,+\infty[$.
- الدالة: $f(x)=|x|$ متصلة على مجموعة تعريفها $D_f=\mathbb{R}$.

VII. العمليات على الدوال المتصلة:

01. خاصية: (تقبل)

I مجال ضمن المجموعة $\mathbb{R}$ $(I\subset\mathbb{R})$.

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I فإن الدوال: $f+g$ و $f\times g$ و $\alpha f,(\alpha\in\mathbb{R})$ متصلة على I.
- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I و g لا تنعدم على المجال I فإن الدوال: $\dfrac{1}{g}$ و $\dfrac{f}{g}$ متصلة على I.

02. مثال:

لنعتبر الدوال التالية المعرفة ب: 1) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}+\cos(x)$. 2) $g(x)=(x^2+3x-2)\times\sqrt{x}$

1) حدد مجموعة تعريف واتصال كل دالة من الدوال السابقة.

جواب

1) نحدد مجموعة تعريف:

- الدالة $x \to \cos x$ معرفة و متصلة على $\mathbb{R}$. الدالة $x \to \frac{2x+1}{x-1}$ معرفة و متصلة على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

إذن الدالة $\frac{2x+1}{x-1}+\cos x$ $x \to$ معرفة و متصلة على $D_f = \mathbb{R}\cap(\mathbb{R}\setminus\{1\}) = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

- الدالة $x \to x^2+3x-2$ معرفة و متصلة على $\mathbb{R}$. الدالة $x \to \sqrt{x}$ معرفة و متصلة على $[0,+\infty[= \mathbb{R}^+$.

إذن الدالة $x \to (x^2+3x-2)\sqrt{x}$ معرفة و متصلة على $D_g = \mathbb{R}\cap\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$.

VIII. اتصال مركبة دالتين متصلتين:

01. تذكير :

$$I \xrightarrow{f} f(I) \text{ و } J \xrightarrow{g} \mathbb{R} \text{ و } f(I) \subset J$$

$$g \circ f : I \xrightarrow{f} f(I) \subset J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

01. خاصية:

لتكن f و g دالتين عدديتين.

- إذا كانت f متصلة في x_0 و الدالة g متصلة في $f(x_0)$ فإن الدالة $g \circ f$ متصلة في x_0 .
- إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J حيث: $f(I) \subset J$ فإن الدالة $g \circ f$ متصلة على I.

02. مثال: أدرس اتصال الدالة $f(x) = \sin(2x+1)$.

الدالة $x \to 2x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$.

الدالة $x \to \sin x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.إذن الدالة: $x \to \sin(2x+1)$ متصلة على $\mathbb{R}$. (لا نها مركبة دالتين متصلتين)

03. نتائج:

- $f(x) = \sin(ax+b)$ و $g(x) = \cos(ax+b)$ دالتان متصلتان على $\mathbb{R}$.
- الدالة $h(x) = \tan(ax+b)$ متصلة في كل x تحقق ما يلي $ax+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$.
- f دالة موجبة و متصلة على المجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ متصلة على I.

IX. دالة الجزء الصحيح :

01. تعريف: (تذكير)

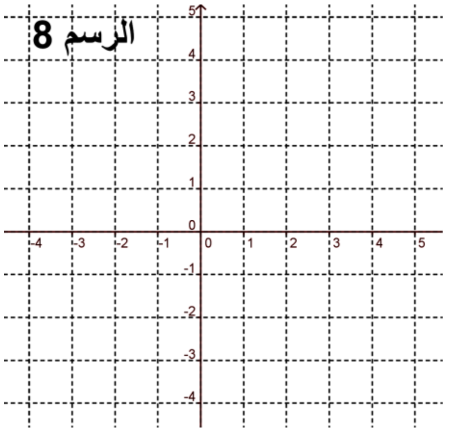
الدالة f التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بالعدد الصحيح النسبي الوحيد p الذي يحقق $p \le x < p+1$ تسمى الدالة الجزء الصحيح

ويرمز لها ب E أو أيضا [ ] نكتب $f(x) = [x] = p$ أو $f(x) = E(x) = p$

02. نشاط:

1) أنشئ منحنى الدالة $f(x) = E(x)$.

2) هل f متصلة على يمين في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2 .



3) هل f متصلة على يسار في 0 و 1 و 2 و 3 و 1 - و 2 - .

4) هل f متصلة في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2 ....

5) هل f متصلة على $[0;1[$ و $[1;2[$ و $[2;3[$....

6) أعط الخاصية.

03. خاصية:

- دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين p وغير متصلة على اليسار p (إذن هي غير متصلة في p).
- دالة الجزء الصحيح متصلة على كل المجالات التي هي على شكل: $[p,p+1[$ (مع $p\in\mathbb{Z}$)

X. صورة مجال بدالة متصلة :

01. نشاط:

نأخذ النشاط أول الدرس و الرسم رقم 1 الذي يمثل الدالة: $f(x)=x^2$

1) استنتج مبيانيا صور جميع الأعداد التي تنتمي إلى القطعة $[0,2]$

2) استنتج مبيانيا : $f([-1,0])$ و $f([-1,2])$. أعط الخاصية.

02. خاصية:

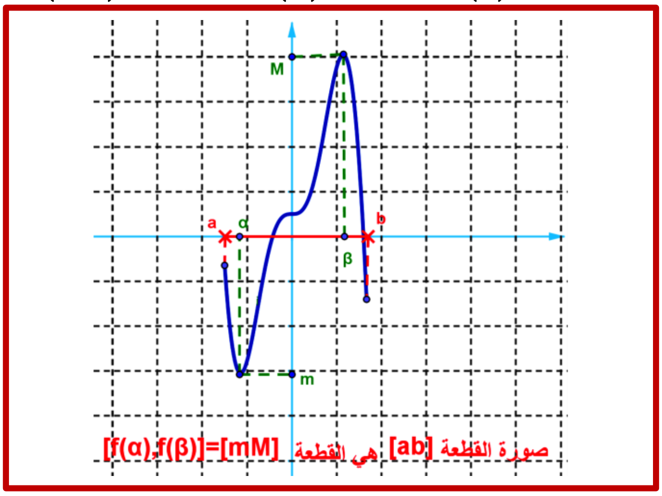
- صورة قطعة $[a,b]$ بدالة متصلة f هي قطعة (تكون على شكل $[m,M]$ مع m و M هي القيمة الدنيا والقيمة القصوى على التوالي ل f على المجال $[a,b]$). (أو أيضا : $m=\min\limits_{a\le x\le b} f(x)$ و $M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$)
- صورة مجال I بدالة متصلة f هي مجال $J=f(I)$.
- ملاحظة : $f([a,b])=[m,M]$.

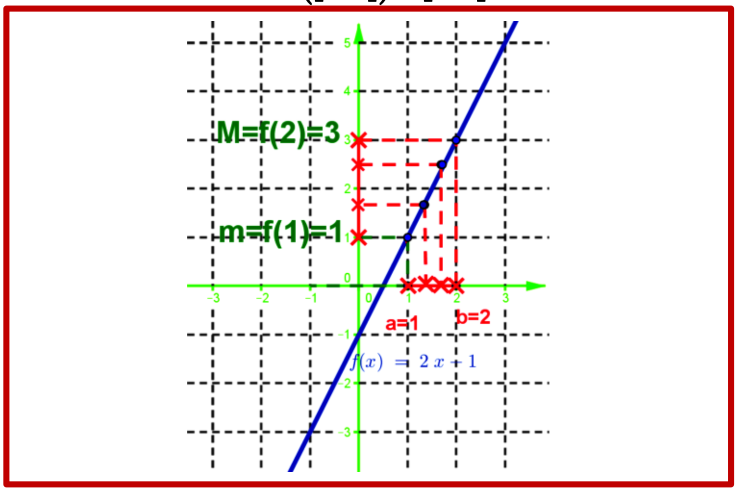
03. مثال 1 : $m=\min\limits_{a\le x\le b} f(x)$ و $M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$.

نضع : $M=f(\beta)$ و $\exists(\alpha,\beta)\in I^2 / m=f(\alpha)$

مثال 2 : $f(x)=2x-1$ لدينا مبيانيا : $f([1,2])=[1,3]$

$f([1,2[)=[1,3[$





XI. مبرهنة القيم الوسيطية: théorème des valeurs intermédiaires

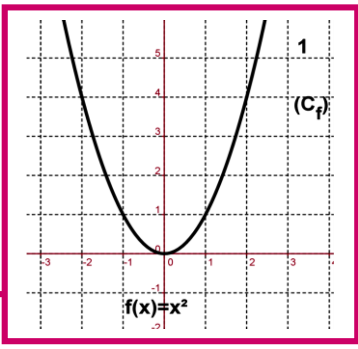
01. نشاط:

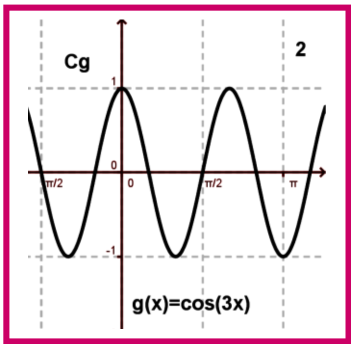
نأخذ $a=1$ و $b=-2$ في الرسم 1 ؛ $a=0$ و $b=\pi$ (الرسم2)

1) استنتج مبيانيا $f(a)$ و $f(b)$. (الرسم 1)

2) نأخذ عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ هل يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]=[-2,1]$ حيث : $f(c)=k$. (الرسم 1)

3) أعط الخاصية:





02. خاصية:

f دالة متصلة على القطعة $[a,b]$.

- لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ حيث : $f(c)=k$.

03. نتائج :

- بما أن : صورة قطعة $[a,b]$ بدالة متصلة هي القطعة $[m,M]$ إذن : $f([a,b])=[m,M]$.
- إذا كان: $f(a)f(b)<0$ أي $f(a)$ و $f(b)$ (احدهما موجب و الآخر سالب) ومنه : $k=0\in f([a,b])=[m;M]$ ومنه يوجد عنصر c من $[a,b]$ حيث : $f(c)=0$.
- نتيجة ل $(f(a)\times f(b)<0)$: المعادلة : $x\in[a,b]/f(x)=0$ تقبل على الأقل حل على $[a,b]$.

XII. دالة متصلة و رتيبة قطعا:

01. نشاط: f دالة متصلة و رتيبة قطعا. لدينا صور المجالات الآتية

المجال I	f متصلة و تزايدية قطعا نحدد : المجال $f(I)$	f متصلة وتناقصية قطعا نحدد: المجال $f(I)$	المجال I	f متصلة و تزايدية قطعا نحدد : المجال $f(I)$	f متصلة وتناقصية قطعا نحدد: المجال $f(I)$
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$	$]a,+\infty[$	$]\lim_{x\to a^+}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)[$	$]\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to a^+}f(x)[$
$[a,b[$	$[f(a),\lim_{x\to b^-}f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-}f(x),f(a)]$	$]-\infty,a]$	$]\lim_{x\to-\infty}f(x),f(a)]$	$[f(a),\lim_{x\to-\infty}f(x)[$
$]a,b]$	$]\lim_{x\to a^+}f(x),f(b)]$	$[f(b),\lim_{x\to a^+}f(x)[$	$]-\infty,a[$	$]\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to a^-}f(x)[$	$]\lim_{x\to a^-}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)[$
$]a,b[$	$]\lim_{x\to a^+}f(x),\lim_{x\to b^-}f(x)[$	$]\lim_{x\to b^-}f(x),\lim_{x\to a^+}f(x)[$	$]-\infty,+\infty[$	$]\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)[$	$]\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)[$
$[a,+\infty[$	$[f(a),\lim_{x\to+\infty}f(x)[$	$]\lim_{x\to+\infty}f(x),f(a)]$			

XIII. الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال:

A. تقابل دالة عددية – التقابل العكسي لدالة :

01. تعريف:

f دالة عددية من I نحو J. $(f:I\to J)$.

- f تسمى دالة تقابل من I نحو J يعني كل عنصر x من I له صورة وحيدة y من J و كل عنصر y من J له سابقا وحيدا x من I
- الدالة g من J نحو I التي تربط كل عنصر y من I بالعنصر الوحيد x من I حيث $f(x)=y$ تسمى الدالة العكسية ل f ؛ و يرمز له ب: $g=f^{-1}$. (أي $(f^{-1}:J\to I)$

02. مثال :

لنعتبر الدالة العددية $f(x)=x$ هل الدالة تقابل من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$.

- هل كل عنصر x من مجموعة الانطلاق $\mathbb{R}$ له صورة وحيدة من مجموعة الوصول $\mathbb{R}$.
- هل كل عنصر y من مجموعة الوصول $\mathbb{R}$ له سابق وحيد من مجموعة الانطلاق $\mathbb{R}$.
- ماذا نستنتج ؟

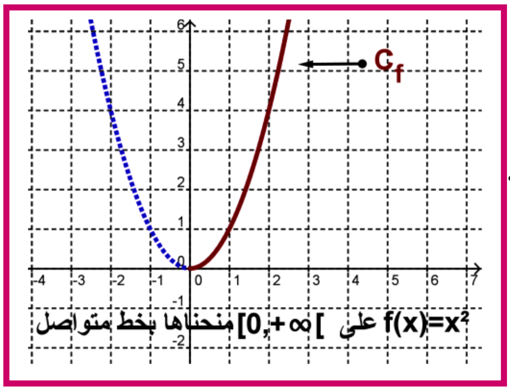
03. ملحوظة:

- الدالة العكسي f^{-1} تكتب على الشكل التالي :
$$f^{-1}: J \to I,\quad y \mapsto f^{-1}(y)$$ أو أيضا : $$f^{-1}: J \to I,\quad x \mapsto f^{-1}(x)$$ و ذلك باستعمال المتغير x بدل من y
- العلاقة التي تربط f و f^{-1} هي : $\begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=f(x) \\ x\in I \end{cases}$
- لكي نبرهن على أن دالة f معرفة من I نحو J بأنها تقابل من I إلى J نبين أن المعادلة $x\in I : f(x)=y$ لها حل وحيد مع y من J.

04. مثال :

لنعتبر الدالة العددية $f(x)=x^2$ على $I=[0;+\infty[$

1. استنتج مبيانيا $J=f(I)$ (أي صورة المجال I ب f).
2. هل لكل عنصر y من $J=f(I)$ له سابق وحيد c من I. استنتج طبيعة التطبيق f .
3. لنعتبر المعادلة : $(E): x\in I=[0,+\infty[\,/\, f(x)=y$. مع y معلوم من J .
   - أ- أوجد عدد حلول المعادلة (E).
   - ب- استنتج الدالة العكسية f^{-1} ل f .



05. خاصية ☹

f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعا على مجال I و $y\in f(I)$.

- الدالة f هي تقابل من I إلى $f(I)$.
- ليكن y من $f(I)$ المعادلة : $x\in I \;/\; f(x)=y$ تقبل حل وحيد على I.

02. نتيجة :

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعا على المجال $[a,b]$.

- فإنه لكل عدد محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد وحيد c من $[a,b]$ حيث: $f(c)=k$.
- إذا كان $f(a)\times f(b)<0$ المعادلة $x\in[a;b]/f(x)=0$ تقبل حل وحيد .

06. ملاحظة:

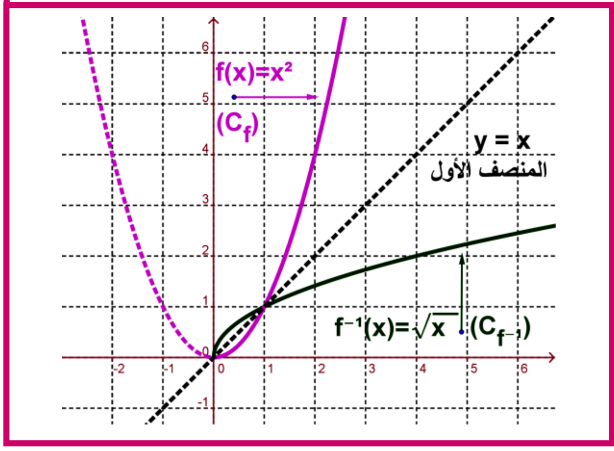
- الدالة f معرفة كما يلي: $f: I \to J=f(I),\ x \to f(x)=y$. الدالة f^{-1} معرفة كما يلي: $f^{-1}: J=f(I) \to I,\ y \to f^{-1}(y)=x$

- $\begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{rcases} f(x)=y \\ x\in I \end{rcases}$
- $\forall x\in I : f^{-1}\circ f(x)=x$. $\forall y\in J : f\circ f^{-1}(y)=y$.
- ويمكن كتابة $\forall y\in J : f\circ f^{-1}(y)=y$ كذلك على الشكل التالي : $\forall x\in J : f\circ f^{-1}(x)=x$

.07 خاصيات الدالة العكسية: (تقبل)

f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعا على مجال I و $J=f(I)$. f^{-1} الدالة العكسية ل f .

1. الدالة f^{-1} متصلة على المجال $J=f(I)$. (تقبل)
2. الدالة f^{-1} رتيبة قطعا على المجال J و لها نفس رتابة f على I .
3. $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1} و (C_f) منحنى الدالة f متماثلان بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته $(D): y=x$ في معلم متعامد ممنظم (المستقيم (D) يسمى المنصف الأول)



.07 مثال: لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=x^2$

1) أ – مبيانيا هل f متصلة على $I=[0;+\infty[$.

ب - استنتج رتابة f على I .

ج - حدد: $J=f(I)$.

د – هل f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال يجب تحديده.

2) حدد: f^{-1} . (C_f) منحنى الدالة f . $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1}

.08 مفردات :

الدالة العكسية f^{-1} المحصل عليها تسمى كذلك الجذر من الرتبة 2 . و نرمز لها ب: $f^{-1}=\sqrt[2]{\ }$ أو باختصار : $f^{-1}=\sqrt{\ }$

XIV. دالة الجذر من الرتبة n

.01 نشاط:

$n\in\mathbb{N}^*$. لنعتبر الدالة $f(x)=x^n$ على المجال $I=[0;+\infty[$.

بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} على المجال J حدده .

.02 مفردات:

- الدالة العكسية f^{-1} تسمى الدالة الجذر من الرتبة n .
- الدالة العكسية f^{-1} يرمز لها ب: $f^{-1}=\sqrt[n]{\ }$.
- نكتب: $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$. أو أيضا $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$
- حالة : $n=1$ لدينا $f^{-1}(x)=\sqrt[1]{x}=x$ (حالة غير مهمة).
- حالة : $n=2$ لدينا $f^{-1}(x)=\sqrt[2]{x}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$. (الدالة تسمى باختصار الجذر المربع)

- حالة : $n=3$ لدينا $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$. (الدالة تسمى باختصار الجذر المكعب أو الجذر الثالث).

03. تعريف وخاصية:

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

- الدالة $f(x)=x^n$ متصلة و تزايدية قطعا على $I=[0;+\infty[$.
- f تقابل من I إلى $J=f(I)=[0,+\infty[$ و دالتها العكسية f^{-1} تسمى الدالة الجذر من الرتبة n و نرمز لها: $f^{-1}=\sqrt[n]{\ }$
- نكتب : $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$. أو أيضا : $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$
- العدد: $\sqrt[n]{a}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد الحقيقي الموجب a .

04. خاصية

- $\sqrt[n]{0}=0$; $\sqrt[n]{1}=1$. $\sqrt[n]{x^n}=x$ و $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x$; $\forall x\geq 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$
- منحنى $\left(C_{f^{-1}}\right)$ للدالة $f^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$ هو مماثل $\left(C_f\right)$ منحنى الدالة $f(x)=x^n$ بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعامد ممنظم
(المنصف الأول هو المستقيم (D) الذي معادلته $(D):y=x$).

05. نتائج:

- $\forall a\in\mathbb{R}^+ ; \forall b\in\mathbb{R}^+ ; \sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a=b$.
- $\forall a\in\mathbb{R}^+ ; \forall b\in\mathbb{R}^+ ; \sqrt[n]{a}\leq\sqrt[n]{b}\Leftrightarrow a\leq b$.

XV. العمليات على الجذور من الرتبة n .

01. خاصيات:

$a\geq 0$ و $b\geq 0$ و n و m من $\mathbb{N}^*$.

- $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\times b}$.
- $\sqrt[n]{\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$; $(b>0)$ و $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $(b>0)$
- $\sqrt[n\times m]{a^m}=\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[a\times m]{a}$.

02. مثال :

بسط: $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt[15]{3^{11}}$.

لدينا : $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}}\times\sqrt[15]{3^{11}}=\sqrt[3\times5]{81}\times\sqrt[15]{3^{11}}$

$$= \sqrt[15]{3^4 \times 3^{11}}$$

$$= \sqrt[15]{3^{15}} = 3$$

خلاصة : $\sqrt[5]{\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}} = 3$

XVI. بعض خاصيات الدوال التي هي على شكل: $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$.

01. خاصيات ☹ (تقبل)

f دالة عددية موجبة على مجال I. n من $\mathbb{N}^*$.

- إذا كانت $f(x)$ متصلة على I فإن $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ متصلة على I.
- إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ و $\ell \geq 0$ فإن : $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$
- إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.
- تبقى الخاصيات صحيحة إذا كان : $x \to \pm\infty \;;\; x \to x_0^+ \;;\; x \to x_0^-$

02. تمرين تطبيقي :

لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$.

1) حدد D_f مجموعة تعريف f.

2) أحسب: $f(-1) \;;\; f(15) \;;\; f(0)$

3) أحسب: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

XVII. القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعا:

01. تعريف :

$r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$ (مع $n \in \mathbb{N}^*$ و $m \in \mathbb{Z}$) و $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

الكتابة $\sqrt[n]{x^m}$ نرمز لها ب : $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ أو أيضا ب : $\sqrt[n]{x^m} = x^r$ أما x^r يسمى القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r .

- $x^r = x^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$.

02. أمثلة :

1) مثال 1 : أكتب على شكل x^r ما يلي : $\left(\sqrt[9]{7}\right)^{11}$ و $\sqrt[8]{3^5}$ و $\left(\sqrt[9]{21}\right)^{-11}$ و $\sqrt[13]{2^{-15}}$ و $\left(\sqrt[5]{3}\right)^{-32}$.

2) مثال 2 : أكتب بطريقة أخرى الأعداد التالية: $\sqrt[4]{3^5}; \sqrt[4]{3^{-5}}; \sqrt{7^3}; \sqrt[5]{11}; \sqrt[3]{8}$.

03. ملاحظة:

- تعريف الأس في $\mathbb{Q}$ هو تمديد لتعريف الأس في $\mathbb{Z}$.
- لدينا : $\forall a > 0 , \forall n \in \mathbb{N}^* : a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^1} = \sqrt[n]{a}$.بمأن : $\sqrt[n]{0} = 0$ يمكن أن نصطلح أن : $0^{\frac{1}{n}} = 0$.

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. بين أنه يمكن تمديد بالاتصال الدالة f في 0 .
3. أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

04. خاصيات القوى الجذرية :

x و y من $\mathbb{R}^{+*}$ و r و r' من $\mathbb{Q}^*$. لدينا :

- $x^r \rangle 0$
- $x^r = x^{r'} \Leftrightarrow r = r'$
- $x^r \times y^r = (x\times y)^r$ و $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $\dfrac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$ و $(x^r)^{r'} = x^{r\times r'}$ و $x^{-r}=\dfrac{1}{x^r}$ و $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$

05. مثال: بسط ما يلي.

1) $A=\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5\times\left(4^{-\frac{1}{2}}\right)\times\left(8^{\frac{2}{3}}\right)$.

2) $B=\dfrac{\sqrt[3]{7}\times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}}$.

جواب :

$$A=\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5\times\left(4^{-\frac{1}{2}}\right)\times\left(8^{\frac{2}{3}}\right)=(2)^{\frac{-5}{3}}\times\left(2^2\right)^{\frac{-1}{2}}\times\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}=(2)^{\frac{-5}{3}}\times\left(2^{-1}\right)\times\left(2^2\right)=(2)^{\frac{-5}{3}-1+2}=2^{-\frac{2}{3}}$$

$$B=\frac{\sqrt[3]{7}\times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}}=\frac{7^{\frac{1}{3}}\times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{-1}{4}}}=\frac{7^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{7^{\frac{-1}{4}}}=7^{1+\frac{1}{4}}=7^{\frac{5}{4}}$$